ФРАКТАЛ: ФОРМА, ФУНКЦИЯ И СИМВОЛ

Фрактал есть мгообразие, соединяющее в себе форму, функцию и символическую фракцию — фрактальную размерность. То обстоятельство, что эти три элемента фрактала равноправны и независимы, мы проиллюстрируем тремя примерами. Первый пример указывает на то обстоятельство, что фрактальная размерность не может быть определена геометрии фрактала (как число π, например). Второй пример иллюстрирует то, что фрактальная размерность не может быть выведена из процесса построения фрактала. Наконец, третий пример показывает, как фрактальная размерность соотносится с геометрией и алгоритмом построения фрактала.

Пример 1.
Фрактальный инвариант *vs* инвариант Пифагора (число π)

Тот факт, что отношение длины окружности к ее диаметру есть инвариант — число π — был истолкован пифагорейцами как манифест связности и единосущности мира. Пугала, впрочем, иррациональность этого числа, его несоразмерность, его неповторимость при том, что оператор расчета представлял собой сплошное повторение. Сначала в окружность вписывался правильный треугольник, потом квадрат, потом шестиугольник и так далее. Чем больше число сторон вписанного многоугольника $n \to \infty$, тем ближе результат к пределу

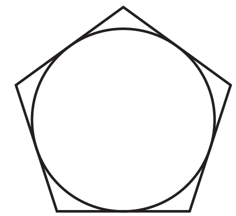
$$L/D \to \pi,$$

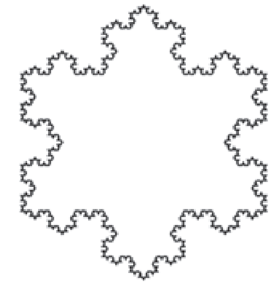
т. е. длина окружности конечна

$$L = \pi D.$$

Здесь сам инвариант — число π, будучи символом, представляет собой отношение длины к диаметру окружности

$$\pi = L/D.$$





Окружность, вписанная в пятиугольник;
остров Коха;
побережье Мальдив

Фрактальная кривая, например остров Коха, отличается от окружности тем, что она, будучи ограниченной, не имеет конечной длины. Кривая Коха в целом и любой ее фрагмент имеют бесконечную длину:

$$L = lim_{n \to \infty} 4^n / 3^n = \infty.$$

Льюис Ричардсон изучал протяженность береговой линии западного побережья Британии. Эксперименты свидетельствовали, что длина береговой линии возрастает с уменьшением масштаба измерения, в пределе — до бесконечности. Объясняя результаты экспериментов Ричардсона, Мандельброт предложил следующий мысленный эксперимент. Наблюдатель обходит береговую линию, измеряя ее стандартным ярдом. Измеренная длина береговой линии является приближенной, поскольку ярд срезает изгибы береговой линии на его длине. Затем наблюдатель измеряет ту же береговую линию в футах. Он получит большее значение длины, так как учтет изгибы, срезанные при измерении ярдом. Уменьшая масштаб измерения, наблюдатель придет к заключению, что длина береговой линии возрастает неограниченно, коль скоро неограниченно уменьшается масштаб измерения. В этом смысле результат измерения длины береговой линии есть функционал, и он зависит от процесса измерения.

Пример 2.
Ветвление деревьев, слияния рек и фрактальная размерность.

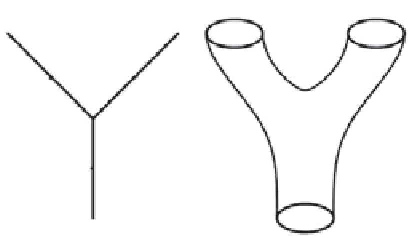
Леонардо да Винчи открыл, что все ветки дерева на данной высоте, сложенные вместе, равны по толщине стволу ниже их уровня. Рассмотрим ствол дерева диаметром d, который разделяется на две главные ветви с диаметрами d_1 и d_2. Леонардо да Винчи считал, что для беспрепятственного движения соков вверх по дереву, поперечные сечения двух главных ветвей в сумме должны быть равны поперечному сечению ствола:

$$d^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2}.$$

То же самое соотношение выполняется в месте слияния двух рек, если d — ширина рек. Установлено, что ширина d реки пропорциональна квадратному корню из количества воды Q, переносимого рекой: $d \sim Q^{0.5}$. Однако глубина реки t, как правило, изменяется в соответствии с законом $t \sim Q^{0.4}$. Возникающая разница восполняется за счет увеличения скорости течения v, которая пропорциональна $Q^{0.1}$. Иначе говоря, река, образовавшаяся от слияния двух притоков одинаковой величины и несущая, таким образом, вдвое больший объем воды в секунду, обычно в 1,4 раза шире каждого из своих притоков, но лишь в 1,3 раза глубже их. Скорость же течения реки приблизительно в 1,1 раза больше, чем скорость течения притоков. Разумеется, 1,1 × 1,3 × 1,4 =2. Таким образом, в обобщенной форме для реки

$$d^n = d_1^{\,n} + d_2^{\,n}$$

где $n = 2$, выполняется в месте слияния двух рек вследствие наложения нескольких условий.



Ветвление и слияние: точка бифуркации.

Пример 3. Бронхиальная система и фрактальная размерность.

Бронхи легкого достигают показателя степени $n \approx 3$, обусловленного требованием минимального сопротивления потоку воздуха во всей бронхиальной системе. Это требование подразумевает существование постоянного «коэффициента ветвления»

$$d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}.$$

В этом случае показатель n должен быть равен 3. Мандельброт указал, что показатель степени равен трем, если выполняется определенное функциональное правило (алгоритм) ветвления:

> *«Рост начинается с почки. Из почки вырастает трубка, на которой образуются две новых почки, каждая из которых ведет себя вышеописанным образом.»*

Развитие по этим правилам образуют структуру легкого. Значение $n = 3$ получается просто вследствие максимальной поверхности легкого в ограниченном пространстве.

Таким образом, фрактальный инвариант — символ — пронизывает форму и алгоритм ее построения будучи вне формы и вне алгоритма. Фрактал, соединив форму, функцию и число (символ), совмещает дискретность и непрерывность (на формальном уровне), детерминизм и непредсказуемость (на функциональном уровне), предметное и операциональное (на символическом уровне). При этом фракталу присущи такие качества, как

ограниченность,
относительность и
ортогональность.

Их и рассмотрим.