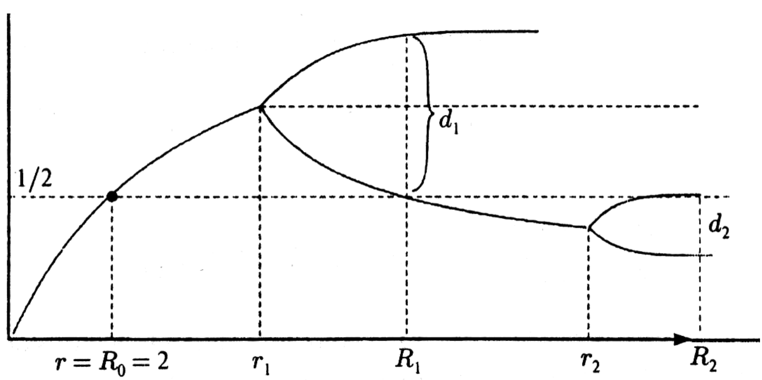
УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ФЕЙГЕНБАУМА

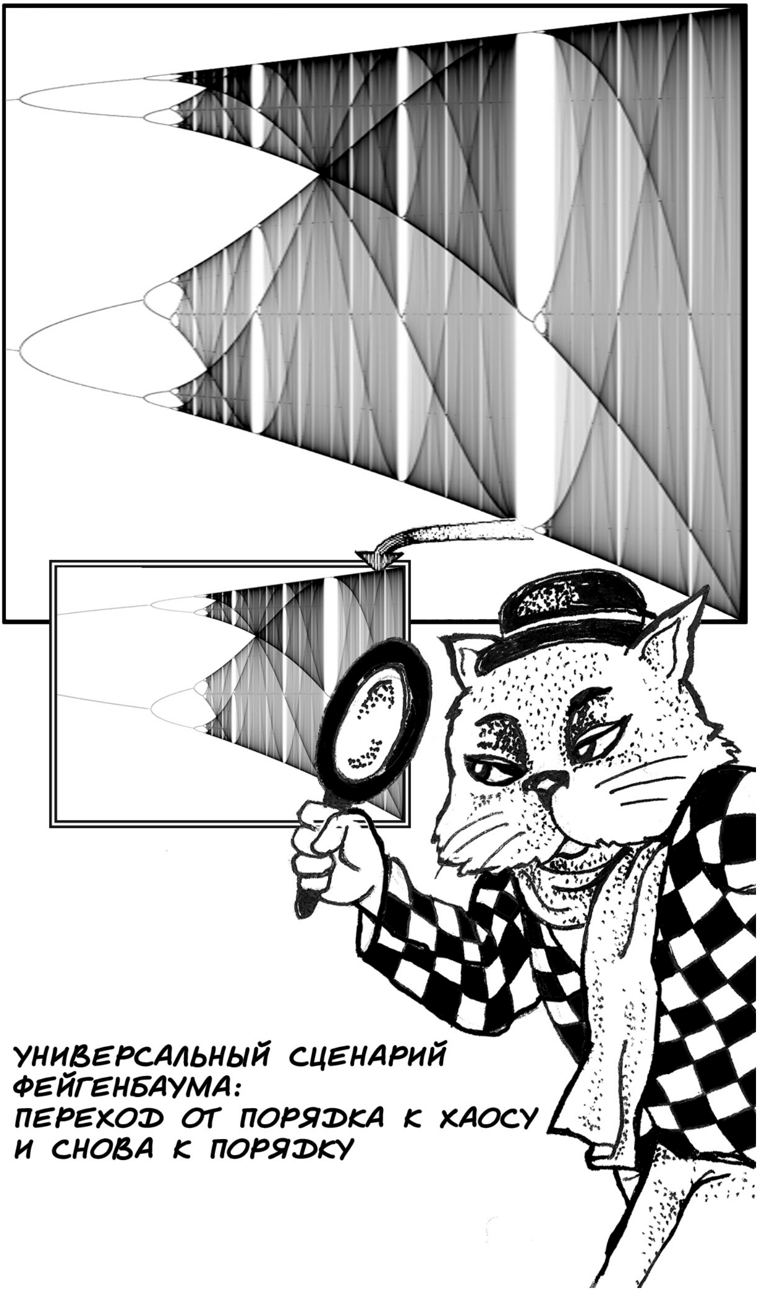
Впечатляющим фактом в отношении порядка и хаоса является некая универсальность сценария перехода от порядка к хаосу. Митчел Фейгенбаум открыл эту универсальность в 1978 г. Универсальность Фейгенбаума касается длин интервалов значений параметра, при которых устойчивым является периодическое движение с некоторым определенным периодом. Эти интервалы сокращаются при каждом удвоении периода, причем множитель, характеризующий скорость перехода к хаотическому режиму, в пределе при $n \to \infty$ приближается к универсальному значению:

$$\delta = r_{n+1}/r_n = r_n/r_{n-1} =$$
$$= 4{,}669\,201\,609\,102\,990\,971\,853\,203\,820\,466\ \ldots$$

Это число называют теперь числом Фейгенбаума. Фейгенбаум не имел ни малейшего представления о том, как оно возникает. Он просто константировал факт. Можно изучать самые разные явления, писать разные уравнения и получать один и тот же такт перехода от порядка к хаосу. Это поразительно!



СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА



УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА: ПЕРЕХОД ОТ ПОРЯДКА К ХАОСУ И СНОВА К ПОРЯДКУ

Как тут не вспомнить известную метафору Джеймса Глейка. Вот она.

> *Представьте себе, что доисторический зоолог решает, что одни животные тяжелее других — они имеют какое-то абстрактное качество, которое он называет весом, — и он хочет изучить эту идею с научной точки зрения. Физически он никогда не измерял вес, однако он полагает, что имеет какое-то представление об этой идее. Он сравнивает больших змей с маленькими змеями, больших медведей с маленькими медведями и приходит к выводу, что вес этих животных должен быть каким-то образом связан с их размером. Он сооружает весы и начинает взвешивать змей. К его удивлению, все змеи весят одинаково. К его ужасу, одинаковый вес имеют и все медведи. И, к еще большему его удивлению, медведи весят столько же, сколько и змеи. Все они весят 4,6692016090 единиц веса.*

Ясно, что вес — это не совсем то, что мы имели в виду. Такой вес есть не столько мера, сколько инвариант — неизменная величина для всех перечисленных объектов, объясняющей, как столь отличные уравнения подчиняются единому ритму появления точек бифуркации.

Но вернемся к уравнению Ферхюльста. Если теперь изобразить бифуркационную диаграмму в координатах x — r, выделить часть бифуркационной диаграммы и представить ее в увеличенном виде, то картина идентична всей диаграмме: природа каскада бифуркаций фрактальна.

На приведенных бифуркационных диаграммах мы видим узкие области, в которых порядок восстанавливается, возникают перемежаемости, своего рода окна в хаосе.

Порядок — вдруг — возвращается, демонстрируя переход от порядка к хаосу и снова к порядку.

Например, при $r \approx 3{,}8285\ldots$ в окне возникают устойчивые колебания периода 3. С увеличением параметра r в этом окне происходят бифуркации

$$f(3) \to f(6) \to f(12) \to f(24) \to \ldots,$$

которые растворяются в хаосе при $r > 3{,}8496\ldots$ т. е. мы вновь имеем дело с каскадом бифуркаций удвоения периода. Подобная картина наблюдается и в других окнах периодичности — переход к хаосу происходит в них в соответствии с тем же сценарием. Каждое окно занимает определенный отрезок на оси абсцисс, длина которого варьируется в широких пределах, но в большинстве случаев отрезки очень малы. В окнах появляется также новый порядок — обратный каскад. Так, например, при $r \approx 3{,}679$ с уменьшением r полоса распадается на две полосы, при $r \approx 3{,}593$ — на четыре, затем на 8, 16, 32 и т. д. до тех пор, пока в пределе такое удвоение не будет происходить бесконечное число раз.

Среди математиков известно неписаное правило: чтобы упростить, рассмотри комплексные числа. Так и поступим. Рассмотрим логистическое уравнение для случая комплексных переменных, т. е. заменим действительную переменную x_n на комплексную величину z_n:

$$x_n \to z_n.$$

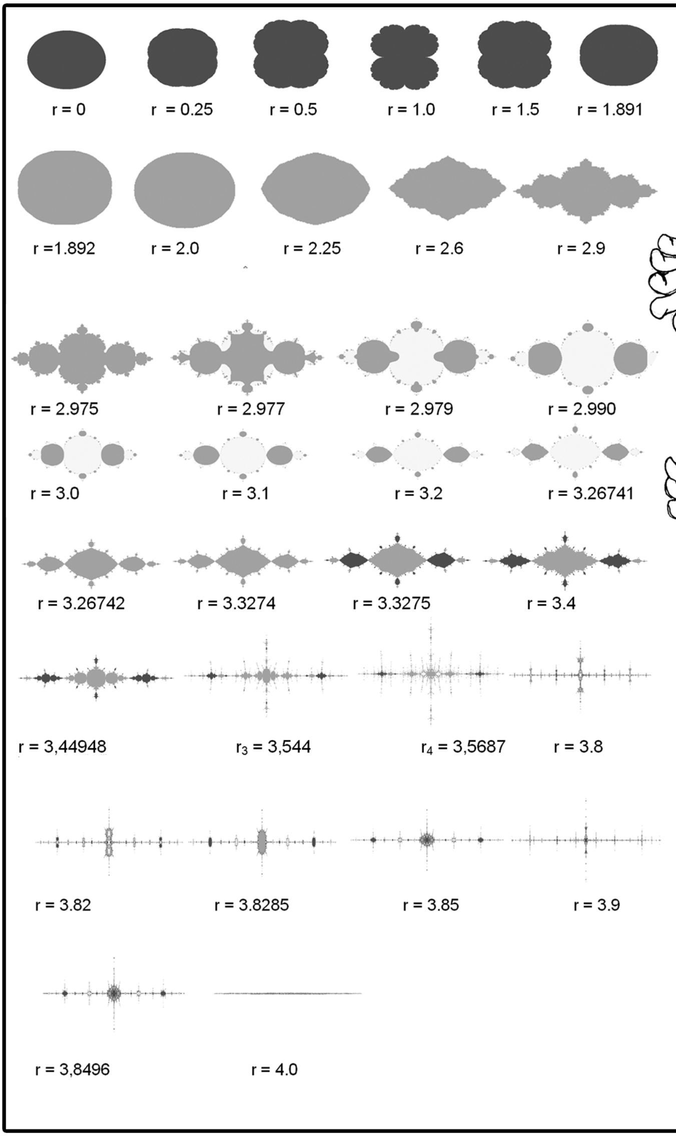
Заменим также действительный параметр r на комплексный параметр $r \to C$:

$$C = r + qi.$$

Логистическое уравнение примет вид:

$$z_{n+1} = C z_n (1 - z_n).$$

При фиксации величины $z_0 = 0$ отображение тождественно нулю. Рассмотрим случай, когда $z_0 \neq 0$ и величина C принимает только действительные значения: $C = r\ (q = 0)$:



КОМПЛЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ $z_{n+1} = r \cdot z_n (1 - z_n)$ (ПРИ $c = r$, $q = 0$)

$$z_{n+1} = r\, z_n\, (1 - z_n).$$

Условимся, как обычно, что если в процессе итерации величина z_n уходит на бесконечность, то начальная точка такой итерации не принадлежит рассматриваемому множеству. Те исходные точки комплексной плоскости, которые в процессе итерации не уходят на бесконечность, образуют множество, форма которого приведена на рисунке для различных значений параметра r.

Здесь мы видим, что переход от одного фазового портрета системы к другому выглядит как скачок, если мы рассматриваем один параметр системы — управляющий параметр r.

На самом деле природа не терпит и не совершает скачков — *natura non facit saltus* — природа ничего не делает резко, или: природа не делает скачков (лат.).

Это наблюдение своими истоками восходит к Аристотелю. В XVIII веке Лейбниц его повторил:

Nullam transitionem fieri per saltum (никакой переход не случается скачкообразно — лат.).

Анализ механизма бифуркации подтверждает этот принцип. Бифуркация является следствием непрерывной трансформации, которая происходит в области мнимых чисел, где шаг за шагом подготавливается внезапный переход на оси действительных чисел. Именно такой эффект имел в виду французский математик-универсал Жак Адамар, говоря:

«Кратчайший путь между двумя истинами в вещественной области проходит через комплексную область».